NMSA334: cvičení 9 – stacionární rozdělení

Definice 9.1: Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem, diskrétní množinou stavů S a maticemi pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}(t)$, $t \geq 0$. Vektor $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_i \geq 0 : i \in S\}$ takový, že $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, se nazývá *invariantní míra* procesu $\{X_t, t \geq 0\}$ na S vzhledem k $\{\boldsymbol{P}(t), t \geq 0\}$. Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i \geq 0 : i \in S\}$, které splňuje $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, se nazývá *stacionární rozdělení* daného řetězce.

Definice 9.2: Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{a} = \{a_i : i \in S\}$ na S se nazývá *limitní rozdělení*, jestliže $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$ pro všechna $i, j \in S$.

Věta 9.1: Pokud existuje limitní rozdělení Markovova řetězce, je to stacionární rozdělení.

Věta 9.2: Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem a maticí intenzit $\boldsymbol{Q}$. Jestliže vnořený řetězec je nerozložitelný a má všechny stavy trvalé, potom existuje invariantní míra $\boldsymbol{\eta}$, která je určena jednoznačně (až na multiplikativní konstantu) jako řešení soustavy $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ a $0 < \eta_j < \infty$ pro všechna $j \in S$. Jestliže $a = \sum_{j\in S} \eta_j < \infty$, potom $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j : j \in S\}$, kde $\pi_j = \eta_j/a$, je stacionární a zároveň limitní rozdělení řetězce.

Příklad 9.1: Uvažujme Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\{0, 1\}$, který má matici intenzit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení řetězce.

Příklad 9.2: Na stavbě pracuje N svářečů, kteří náhodně a nezávisle odebírají proud. Svářeč, který v čase t neodebírá proud, začne v intervalu $(t, t+h]$ proud odebírat s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$; svářeč, který v čase t proud odebíral, ukončí odběr v intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$. Nechť X_t značí počet svářečů, kteří v čase t odebírají proud. Najděte matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ a určete stacionární rozdělení.

Příklad 9.3: V obchodě pracují tři prodavačky. Pokud prodavačka právě někoho obsluhuje, pak pravděpodobnost, že zákazníka doobslouží v časovém intervalu $(t, t+h]$ a nikoho obsluhovat nebude, je $3h + o(h)$. V intervalu $(t, t+h]$ přijde jeden zákazník s pravděpodobností $2h + o(h)$, dva nebo více s pravděpodobností $o(h)$ a žáden s pravděpodobností $1 - 2h + o(h)$. Předpokládejme, že zákazníci přicházejí zaměstnávat jednotlivé prodavačky nezávisle a rovněž ony se chovají nezávisle na svých kolegyních. Pokud všechny prodavačky obsluhují, nově přichozí zákazník odchází neobsloužen. Buď $\{X_t, t \geq 0\}$ Markovův řetězec udávající počet prodavaček obsluhujících zákazníky v čase t. Najděte matici intenzit řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. Určete rozdělení počtu obsluhujících prodavaček v ustáleném režimu (tj. limitní rozdělení řetězce). Jaká je pravděpodobnost, že v ustáleném režimu žádná z prodavaček neobsluhuje zákazníka?

Příklad 9.4: Na horskou chatu spolu vyjeli tři kamarádi. Při příjezdu na chatu v čase $t = 0$ je jeden z nich nemocný. Vlastnosti nemoci jsou takové, že jsou-li spolu zdravý a nemocný jedinec, pak ten nemocný nakazí zdravého v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\frac{1}{2}h + o(h)$. Jedinec nemocný v čase t se naopak uzdraví v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\frac{1}{3}h + o(h)$. Uzdravování a infikování jednotlivých jedinců probíhá nezávisle (nakažený=infikovaný=nemocný). Zdravý jedinec nemůže nakazit nikoho. Nechť Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ udává počet nemocných kamarádů na chatě v čase t. Určete matici intenzit přechodu řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. Spočtěte matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce. Spočtěte stacionární rozdělení řetězce. Jaká je střední hodnota doby setrvání řetězce v počátečním stavu?

Příklad 9.5: Uvažujme matici

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ pq & -p & p^2 & 0 & \dots \\ p^2q & 0 & -p^2 & p^3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $0 < p < 1$ a $p + q = 1$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{Q}$ je matice intenzit Markovova řetězce se spojitým časem a spočetnou množinou stavů. Rozhodněte, zda existuje stacionární rozdělení.

Příklad 9.6: Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci. Rozhodněte, zda všechny stavy vnořeného řetězce jsou trvalé. Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce. Pokud ano, tak ho určete. Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit $\boldsymbol{Q}$. Pokud ano, tak ho určete.